一、选择题（1—10小题，每小题5分，共50分，下列媒体给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的。）

1 C.

解 由已知，$f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处取得极大值，由极值的必要条件，知

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0.$$

2 A.

解 由

$$\begin{cases} f'_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0, \\ f'_y=e^{2x}(2y+2)=0, \end{cases}$$

得驻点 $P\left(\frac{1}{2},-1\right)$. 由于 $A=f''_{xx}(P)=2e$, $B=f''_{xy}(P)=0$, $C=f''_{yy}(P)=2e$，故

$$AC-B^2=2e\cdot 2e-0>0,\ A=2e>0,$$

所以 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$ 为极小值，A 正确.

3 D.

解 $f'_x=\frac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}$, $f'_y=\frac{e^x}{(x-y)^2}$，故 $f'_x+f'_y=\frac{e^x}{x-y}=f$，D 正确.

4 A.

解 利用保号性和极值的定义.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{e^{x^2+y^2}-1}=1$，知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$. 又由保号性，知在点 $(0,0)$ 的去心邻域内有 $f(x,y)>0=f(0,0)$. 由极值的定义，知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值，A 正确.

5 B.

解 在点 $(0,0)$ 的去心邻域内有 $|x|+y^4>0$，则由保号性，可知 $f(x,y)-f(0,0)<0$，再由极值的定义，可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值，故 B 正确.

6 C.

解 由 $\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\arctan\frac{1}{|y|}=\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\Delta f-df}{\rho}=\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y]}{\rho}=\frac{y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\left[0\cdot x+\frac{\pi}{2}\cdot y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

由于 $\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$，故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta f-df}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，故 C 正确.

7 A.

解　由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，知 $f(x,y)$ 关于 x 单调增加；由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，知 $f(x,y)$ 关于 y 单调减少，故当 $x_1<x_2, y_1>y_2$ 时，有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1), f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$，即

$$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2).$$

8 A.

解　由 $F'_x(x_0,y_0)=0$，得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}=0$，故 $x=x_0$ 是 $y=y(x)$ 的驻点.

方程 $F(x,y)=0$ 两边同时对 x 求导，得 $F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$. 再对 x 求导，得

$$F''_{xx}(x,y)+F''_{xy}(x,y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[F''_{yx}(x,y)+F''_{yy}(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_y(x,y)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0.$$

将 (x_0,y_0) 代入上式，解得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}=-\dfrac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}>0$，故 $y=y(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值，A 正确.

9　D

解　对于 D：当 D 中条件成立时，有

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\cdot(\Delta x)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}\right]=0,$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{1}{\Delta y}\cdot(\Delta y)^2\sin\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]=0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

10 C.

解　令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1$，则 $F(0,1,1)=0$.

$F(x,y,z)$ 对 x,y,z 分别求偏导，得

$$F'_x=y+\mathrm{e}^{xz}\cdot z,\ F'_y=x-\frac{z}{y},\ F'_z=-\ln y+\mathrm{e}^{xz}\cdot x,$$

故　$$F'_x(0,1,1)=2\neq 0,\ F'_y(0,1,1)=-1\neq 0,\ F'_z(0,1,1)=0,$$

根据隐函数存在定理，知 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(0,1,1)$ 的某个邻域内能确定隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$，故 C 正确.

二、填空题（**11-16** 小题，每小题 **5** 分，共 **30** 分。）

11. $\dfrac{-z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}}{(1+z)^3}$.

解　已知方程两边同时对 x,y 求偏导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-\mathrm{e}^{-x^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+\mathrm{e}^{-y^2}=0.$$

上两式解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ze^{-x^2}}{1+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-ze^{-y^2}}{1+z}$. 故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{e^{-x^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(1+z)-ze^{-x^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+z)^2}$$

$$=\frac{e^{-x^2}}{(1+z)^2}\cdot\left(\frac{-ze^{-y^2}}{1+z}\right)=\frac{-ze^{-(x^2+y^2)}}{(1+z)^3}.$$

12. $f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y\left(xf''_{11}-\frac{x}{y^2}f''_{12}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}\left(xf''_{21}-\frac{x}{y^2}f''_{22}\right)-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

$$=f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.$$

【注】 此题 g' 不能写成 g'_x.

13. 2.

解　令 $P=\frac{x+ky}{(x+y)^2}$，$Q=\frac{y}{(x+y)^2}$，依题意

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\frac{\partial u}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

故$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则

$$\frac{0-y\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{k(x+y)^2-(x+ky)\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4},$$

比较两边分子，得 $-2y=(k-2)x-ky$，解得 $k=2$.

14. y^2+xy+1.

解　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 两边同时对 y 积分，得$\frac{\partial z}{\partial y}=\int 2\mathrm{d}y+\varphi(x)=2y+\varphi(x)$.

由 $z'_y(x,0)=x$，得 $\varphi(x)=x$，故$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x$，再两边同时对 y 积分，得

$$z=\int(2y+x)\mathrm{d}y+\varphi_1(x)=y^2+xy+\varphi_1(x).$$

又由 $z(x,0)=1$，得 $\varphi_1(x)=1$，于是 $z(x,y)=y^2+xy+1$.

15. $\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2$.

解　$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=x+y$ 两边同时对 x 积分，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\int(x+y)\mathrm{d}x+\varphi(y)=\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi(y),$$

由 $z(0,y)=y^2$，有$\frac{\mathrm{d}(y^2)}{\mathrm{d}y}=\varphi(y)$，故 $\varphi(y)=2y$.

又由$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}x^2+xy+2y$，两端同时对 y 积分，得

$$z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+y^2+\varphi_1(x),$$

由于 $z(x,0)=x$，故 $\varphi_1(x)=x$，所以 $z(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2$.

16. $n!\left[1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right]$.

解 $z=\frac{2x}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y}-\frac{1}{y-x}$，利用 $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$，有

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=(-1)^n\frac{n!}{(x+y)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(y-x)^{n+1}},$$

故 $$\left.\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right|_{(2,1)}=(-1)^n\frac{n!}{3^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(-1)^{n+1}}=n!\left[1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right].$$

三、解答题（**17—22** 小题，共 **70** 分，解答影协出文字说明、证明过程或演算步骤。）

17.（本题满分 10 分）

解 （1） $$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\cdot\varphi(x,0),$$

由 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，及 $\varphi(0,0)=0$，得 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x,0)=\varphi(0,0)=0$，故 $f_x'(0,0)=0$.

同理可求得 $f_y'(0,0)=0$.

（2）由于 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta f-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}\varphi(x,y)-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varphi(x,y)=\varphi(0,0)=0,$$

故由可微的定义，知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且全微分

$$\left.\mathrm{d}f\right|_{(0,0)}=f_x'(0,0)\mathrm{d}x+f_y'(0,0)\mathrm{d}y=0.$$

18.（本题满分 12 分）

解 由 $$\begin{cases}f_x'=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0,\\ f_y'=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0,\end{cases}$$

解得驻点为 $(1,0)$，$(-1,0)$. 又由

$$A=f_{xx}''=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$B=f_{xy}''=y(x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$C=f_{yy}''=x(y^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

可知在点 $(1,0)$ 处，有 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0$，$A=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<0$，故 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为极大值.

在点 $(-1,0)$ 处，有 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0$，$A=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>0$，故 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为极小值.

综上所述，$f(x,y)$ 在点 $(-1,0)$ 处取得极小值 $-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，在点 $(1,0)$ 处取得极大值 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

19.（本题满分 12 分）

（1）当 $k\neq -1$ 时，

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+k)\ \sqrt{x^2}+o(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+k)\frac{|x|}{x}+\frac{o(x)}{x}\right],$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+k)\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，故 $f'_x(0,0)$ 不存在，同理 $f'_y(0,0)$ 不存在，因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微（偏导数存在是可微的必要条件）.

（2）当 $k=-1$ 时，$f(x,y)=o(\rho)$，故

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

同理，$f'_y(0,0)=0$，故 $\mathrm{d}f\Big|_{(0,0)}=0\cdot x+0\cdot y$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

20.（本题满分 12 分）

解　方程组等号两边同时对 y 求导，得

$$\begin{cases}F'_1\cdot\left(1-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)+F'_2\cdot\left(1-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)=0,\\[2ex] G'_1\cdot\left(x+y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)+G'_2\cdot\left(-\dfrac{z}{y^2}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)=0,\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}F'_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+F'_2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=F'_1+F'_2,\\[2ex] yG'_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{y}G'_2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\dfrac{z}{y^2}G'_2-xG'_1,\end{cases}$$

解此方程组，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\begin{vmatrix}F'_1+F'_2 & F'_2\\ \dfrac{z}{y^2}G'_2-xG'_1 & \dfrac{1}{y}G'_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_1 & F'_2\\ yG'_1 & \dfrac{1}{y}G'_2\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{1}{y}F'_1G'_2+xF'_2G'_1+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{z}{y^2}\right)F'_2G'_2}{\dfrac{1}{y}F'_1G'_2-yF'_2G'_1}.$$

同理，可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\frac{(x+y)F'_1G'_1+yF'_2G'_1-\dfrac{z}{y^2}F'_1G'_2}{\dfrac{1}{y}F'_1G'_2-yF'_2G'_1}.$$

21.（本题满分 12 分）

解　分段函数，用偏导数的定义进行求解.

（1）
$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0.$$

同理，$f'_y(0,0)=0$. 由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(0+x,0+y)-f(0,0)-[f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}x\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

其中当 $x\to0$ 时，$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，$\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

（2）
$$f'_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

取 $y=x$，则 $\lim\limits_{y=x\to0}f'_x(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt2\,|x|}-\frac{1}{2\sqrt2}\cdot\frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{\sqrt2 x}\right)$ 不存在，故 $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

同理，$f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

22.（本题满分 12 分）

（1）解　已知方程两边同时对 x,y 求偏导数，得

$$\begin{cases}2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, & ①\\[2mm] -6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0. & ②\end{cases}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得 $\begin{cases}x-3y=0,\\-3x+10y-z=0,\end{cases}$ 解得 $x=3y,z=y$，代入原方程解得

$$x=9,y=3,z=3 \text{ 或 } x=-9,y=-3,z=-3.$$

①② 式两边同时对 x,y 求偏导数，得

$$\begin{cases}2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\\[2mm] -6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\\[2mm] 20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\end{cases}$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0,x=9,y=3,z=3$ 代入上方程组，得

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac16,\ B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\frac12,\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac53,$$

故 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，$A=\frac16>0$，所以 $z(9,3)=3$ 为极小值.

同理，得

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac16,B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3,-3)}=\frac12,\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac53,$$

故 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，$A=-\frac16<0$，所以 $z(-9,-3)=-3$ 为极大值.

（2）证　由 $z=f(x)\ln f(y)$，得 $z'_x=f'(x)\ln f(y)$，$z'_y=f(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}$.

由已知，$f'(0)=0$，故 $z'_x(0,0)=f'(0)\ln f(0)=0$，$z'_y(0,0)=f(0)\cdot\dfrac{f'(0)}{f(0)}=0$. 又

$$z''_{xx}(x,y)=f''(x)\ln f(y),$$
$$z''_{xy}(x,y)=f'(x)\frac{f'(y)}{f(y)},$$
$$z''_{yy}(x,y)=f(x)\frac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{f^2(y)},$$

所以

$$A=z''_{xx}(0,0)=f''(0)\ln f(0),\ B=z''_{xy}(0,0)=0,\ C=z''_{yy}(0,0)=f''(0),$$

又 $f''(0)>0$，$f(0)>1$，故

$$AC-B^2=f''(0)\ln f(0)\cdot f''(0)-0^2=[f''(0)]^2\ln f(0)>0,$$
$$A=f''(0)\ln f(0)>0,$$

所以 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值.