

湛江雅托培训中心 2024 年考研数学 (二) 全真模拟试题第三章一元函数积分学

一、选择题 (1—10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分, 下列媒体给出的四个选项中, 只有一个选项是最符合题目要求的。)

1. 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \cdot \sin t dt$, 则正确的是 ()。

- A. $F(x)$ 为正的常数
B. $F(x)$ 为负的常数
C. $F(x)$ 不是常数
D. $F(x)$ 恒为零

2. 设 $\delta > 0$, 在 $(-\delta, \delta)$ 内有 $|f(x)| \leq x^2, f''(x) > 0, I = \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx$, 则 ()。

- A. $I = 0$
B. $I > 0$
C. $I < 0$
D. 不能确定

3. 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x) dx$, 则 ()。

- A. $I_1 < 1 < I_2$
B. $I_2 < 1 < I_1$
C. $1 < I_1 < I_2$
D. $I_1 < I_2 < 1$

4. 设 $f(x)$ 二阶可导, 则下列结论正确的是 ()。

① 当 $f'(x) < 0$ 时, 则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx < 0$; ③ 当 $f''(x) > 0$ 时, 则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx > 0$;

② 当 $f'(x) < 0$ 时, 则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx > 0$; ④ 当 $f''(x) > 0$ 时, 则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx < 0$ 。

- A. ②③
B. ①②
C. ②④
D. ①④

5. 设反常积分 $\int_1^{+\infty} x^k (e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1}) dx$ 收敛, 则正确的是 ()。

- A. $k > -1$
B. $k < -1$
C. $k > 1$
D. $k < 1$

6. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2a-x) (a \neq 0), b$ 为常数, 则 $I = \int_{-b}^b f(a-x) dx = ()$ 。

- A. $2 \int_0^b f(2a-x) dx$
B. $2 \int_{-b}^b f(2a-x) dx$
C. $2 \int_0^b f(a-x) dx$
D. 0

7. 设 $\varphi(x) = \frac{x^2}{x-1} \int_1^x f(t) dt, f(x)$ 为连续函数, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = ()$ 。

- A. 1
B. $f(1)$
C. 0
D. 不存在

8. 设 $f(x)$ 有连续导数, $f(0) = 0, f'(0) = 6, \alpha(x) = \int_0^{x^3} f(t) dt, \beta(x) = \left[\int_0^x f(t) dt \right]^3$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是 ()。

- A. 同阶无穷小
B. 等价无穷小
C. 高阶无穷小
D. 低阶无穷小

9. 设 $I = \frac{1}{s} \int_0^s f\left(t + \frac{x}{s}\right) dx, s > 0, t > 0$, 则正确的是 ()。

- A. I 仅依赖于 s
B. I 仅依赖于 t
C. I 依赖于 s, t
D. I 依赖于 s, t, x

10. 设积分 $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} (p > 0, q > 0)$ 收敛, 则 ()。

湛江雅托培训中心 2024 年考研数学（二）全真模拟试题第三章一元函数积分学

A. $p > 1$ 且 $q < 1$.

B. $p > 1$ 且 $q > 1$

C. $p < 1$ 且 $q < 1$

D. $p < 1$ 且 $q > 1$

二、填空题（11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分。）

11. $f(x) = \max\{1, x^2\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $F(0) = 1$ 的一个原函数为_____.

12. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 若 $x_0 \in [a, b], x \in [a, b]$, 则极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^x [f(t + \Delta x) - f(t)] dt =$ _____.

13. 由曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴围成的平面图形的面积 $A =$ _____.

14. 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 围成的平面图形的面积为_____.

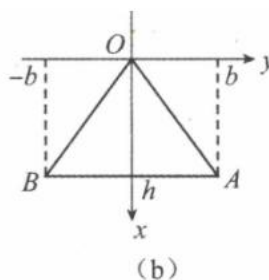
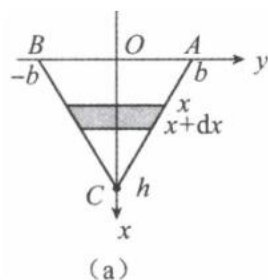
15. 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

16. 已知 $f'(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f(0) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

三、解答题（17—22 小题，共 70 分，解答写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

17. (本题满分 10 分)

设如图 (a), (b) 所示为同一等腰三角形薄板, 已知其底为 $2b$ 、高为 h , 将其垂直放入静水中, 图(a) 是其底与水面相齐, 图(b) 是其顶点与水面相齐, 设图(a) 与图(b) 薄板 一侧所受压力分别为 P_1 和 P_2 , 求 $\frac{P_2}{P_1}$.



18. (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 证明:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

19. (本题满分 12 分)

设曲线 $y = f(x)$ 上任一点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率为 $a^2 x^2 - 4ax + 3$, 且 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值 0.

(1) 求 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的其它极值;

(2) 证明: $0 \leq \int_0^1 \sqrt{f(ut)} dt \leq \frac{2}{3u}, u \in (0, 1).$

20. (本题满分 12 分)

设 $f(x) = x^n \sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$ 与 $y = 0$ 所围平面区域的面积为 S_n , $g(x) = \sin^{\frac{n}{2}} x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 与 $y = 0$ 所围平面区域绕 x 轴旋转一周所得体积为 $V_n (n = 1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi S_n}{V_n}$.

21. (本题满分 12 分)

设 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非负连续, 曲边梯形

$$D(t) = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

$D(t)$ 所围图形的面积 $S(t) = te^t$, $D(t)$ 绕直线 $x = t$ 旋转一周所得旋转体的体积为 $V(t)$, 求 $V(t)$ 的表达式.

22. (本题满分 12 分)

设曲线 $L: y = \tan x^2 \left(0 \leq x \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$.

- (1) 求由 $y = 1$ 与曲线 L 以及 y 轴围成的图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V ;
- (2) 设 (1) 中旋转体内盛满水, 问将水抽完至少需要做多少功? 用 W 表示所做的功, 用 ρ 表示水的密度, 用 g 表示重力加速度.